Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Soluzione primo esonero AM210

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. L.Chierchia

a cura di Vincenzo Morinelli, Emanuele Padulano

1. (a) Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, diremo f derivabile in x_0 se esiste finito il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

o equivalentemente il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Chiameremo $f'(x_0)$ il valore del limite.
Se $f(x) = \frac{x^2}{2}$,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{x_0^2+2hx_0+h^2-x_0^2}{2h} \\ &= x_0 \end{aligned}$$

quindi $f'(x) = x$.

(b) Se una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ha massimo relativo in $x_0 \in (a, b)$ ed é derivabile allora $f'(x_0) = 0$

Prova:

Da x_0 punto di massimo relativo esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x) \leq f(x_0)$ quindi:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0]$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad x \in [x_0, x_0 + \delta)$$

ora da f derivabile

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e da $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ segue necessariamente che $f'(x_0) = 0$

(c)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - 1)^2)$$

se $f(x) = e^x$ ed $x_0 = 1$:

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

(d) Una funzione semplice é somma finita di funzioni caratteristiche di intervalli di $\mathbb{R}$ del tipo $[a_i, b_i)$ con $-\infty \leq a_1 \leq b_i \leq +\infty$. A meno di considerare le sovrapposizioni si possono considerare disgiunti e una funzione caratteristica avrá la forma:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} t_i \chi_{[a_i,b_i)}(x).$$

$t_i \in \mathbb{R}$ per $i = 1, ..., n$.
Il suo integrale sará:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} t_i(b_i - a_i).$$

Affinché questo sia finito supporremo $b_i - a_i < +\infty$.

(e) Sia $f(x)$ una funzione continua e limitata nell'intervallo $[a, b)$. la sua funzione integrale

$$F(x) := \int_a^x f(s)ds \qquad x \in [a, b)$$

é derivabile e si ha

$$F'(x) = f(x) \qquad x \in [a, b)$$

Se poi $G(x)$ é una funzione derivabile in $[a, b)$ e $G'(x) = f(x)$ allora

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds = G(x) - G(a)$$

2. Studiare le seguenti funzioni (includendo il disegno del grafico) :

$$f(x) = \log \frac{x^2}{x-1} \qquad g(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

(a)

$$f(x) = \log \frac{x^2}{x-1}$$

Dominio Dobbiamo imporre

$$\frac{x^2}{x-1} > 0$$

perció:

$$D = (1, +\infty)$$

Studio del segno

$$\log \frac{x^2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} \geq 1$$

quindi se $x^2 - x + 1 > 0$ ma questo é verificato $\forall x \in \mathbb{R}$.
Asintoti L'eventuale asintoto verticale potrebbe essere $x = 1$, per verificarlo:

$$\lim_{x\to 1^+} \log \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

quindi $x = 1$ é asintoto verticale.
Se vi é asintoto orizzontale dovrá essere finito il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \log \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

quindi non vi é asintoto orizzontale.Non vi sará neanche asintoto obliquo dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log \frac{x^2}{x-1}}{x} \overset{\text{De l'Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{(-1+x)x} = 0$$

Massimi e minimi

$$f'(x) = \frac{x-2}{(-1+x)x}$$

Essendo $f \in \mathcal{C}^1((1,+\infty))$ i candidati massimi e minimi relativi sono da cercare fra i valori delle $x \in (1,+\infty)$ che annullano la derivata di f: $x = 2$. Da $f'(x) > 0$ per $x > 2$ e $f'(x) < 0$ per $x < 2$, $x = 2$ sará punto di minimo relativo ed assoluto mentre il $\sup_{x\in(1,+\infty)} f(x) = +\infty$.
Flessi e concavitá

$$f''(x) = -\frac{2-4x+x^2}{(-1+x)^2x^2}$$

da $f \in \mathcal{C}^2((1,+\infty))$ vediamo che, andando a studiare il segno della derivata seconda, per $x \in D$

$$-\frac{2-4x+x^2}{(-1+x)^2x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2+\sqrt{2}$$

quindi f é convessa per$1 < x \leq 2+\sqrt{2}$, é concava per $x \geq 2+\sqrt{2}$ e $x = 2+\sqrt{2}$ é punto di flesso.

(b)

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

Dominio

Dobbiamo imporre il denominatore diverso da zero, dunque $x \neq 0$ perció

$$D = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$$

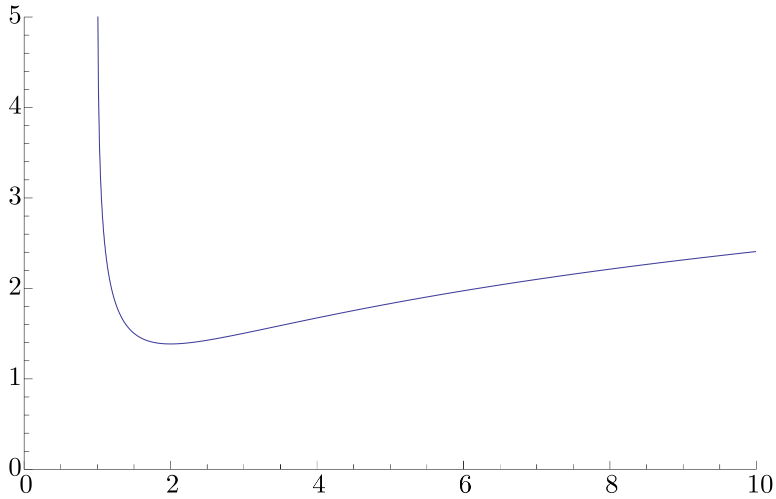

Figura 1: $f(x) = \log \frac{x^2}{x-1}$

Studio del segno

Imponendo il numeratore maggiore uguale di zero ed il denominatore maggiore di zero, si ha che

$$g(x) \geq \ 0 \Leftrightarrow x > \ 0$$

essendo il numeratore sempre positivo.

L' eventuale asintoto verticale si troverá sull' asse y essendo 0 l'unico punto non appartenente al dominio. Calcoliamo quindi limite destro e sinistro in 0 di $g(x)$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \infty$$

Dunque $x = 0$ é un asintoto verticale per $g(x)$.

Notando che $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ deduciamo che non vi sono asintoti orizzontali.

Andiamo quindi alla ricerca di eventuali asintoti obliqui. Si ha che :

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

e

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Dunque $y = x$ é un asintoto obliquo.

Massimi e minimi

Andiamo a valutare il segno della derivata prima:

$$g'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \geq\ 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq\ 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Quindi $x = -1$ é un punto di massimo e $x = 1$ é un punto di minimo.

Flessi e concavitá

Andiamo a valutare il segno della derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{2}{x^3} \geq\ 0 \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$$

Quindi la funzione é concava in $(-\infty, 0)$ e convessa in $(0, +\infty)$.

3. Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\int \frac{2x+1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \ln(x^2+1) + \arctan x + c$;

   (b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

   Imponiamo la sostituzione $x^2 = t \quad \Rightarrow \quad 2xdx = dt$, dunque si ha che

   $$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{1}{2} \arcsin t + c = \frac{1}{2} \arcsin x^2 + c$$

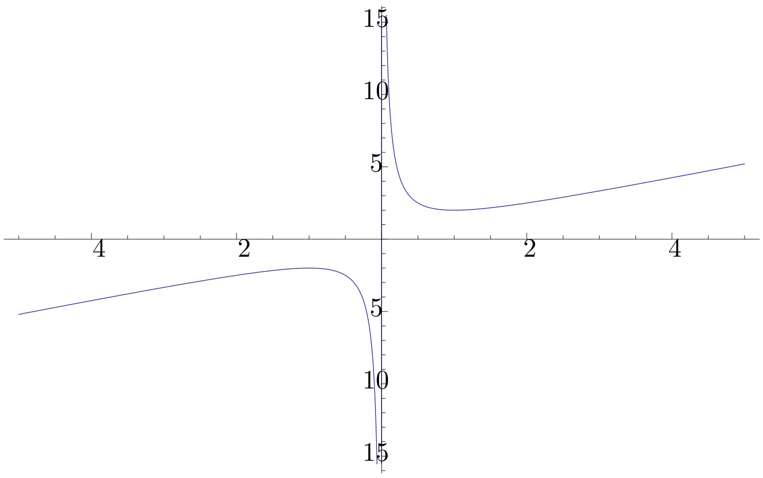

Figura 2: $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

(c)
$$\int \frac{x}{\cos x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\cos x^2}\, dx$$
Imponendo la stessa sostituzione dell' integrale precedente otteniamo che
$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\cos x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos t}\, dt$$
Ponendo $y = \tan\frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{2dy}{y^2+1}$ si ha che
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{\cos t}\, dt &= \int \tfrac{1}{1-y^2}\, dy \\ &= \tfrac{1}{2}\int \left(\tfrac{1}{1-y} + \tfrac{1}{1+y}\right) dy \\ &= \tfrac{1}{2}\log\left(\tfrac{1+y}{1-y}\right) + c \\ &= \tfrac{1}{2}\log\left(\tfrac{1+\tan\frac{x^2}{2}}{1-\tan\frac{x^2}{2}}\right) + c \end{aligned}$$

(d) $\int_4^9 \frac{1}{x-\sqrt{x}}dx$ Imponendo la sostituzione $x = t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2tdt$. Inoltre cambiano anche gli estremi di integrazione, cioé $9 \to 3$ e $4 \to 2$.
Quindi $\int_4^9 \frac{1}{x-\sqrt{x}}\, dx = 2\int_2^3 \frac{1}{t-1}\, dt = 2\ln 2 = \ln 4$.

4. Usando la formula di Taylor, calcolare $\sin 1$ a meno di un errore di 10^{-2}.
<u>Soluzione:</u>
Dalla formula di Taylor in 0 del $\sin x$, si ha che:
$$\sin x = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{k!}x^i + R_n(0,x)$$
dove $f^{(2i)}(0) = \sin(0) = 0$, $f^{(2i+1)}(0) = (-1)^i$ per $i \geq 0$ e dalla formula del resto di Lagrange
$$R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \xi \in [0,x].$$

Per $x = 1$ vogliamo stimare il resto inferiore a 10^{-2} quindi sapendo che le derivate di $\sin x$ sono $|f^{(2i+1)}(x)| = |(-1)^i \cos(x)| \leq 1$, $|f^{(2i)}(x)| = |(-1)^i \sin(x)| \leq 1$ avremo

$$|R_n(1,0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \leq 10^{-2}$$

per n=4. Quindi, per avere un approssimazione di $\sin 1$ con errore inferiore a 10^{-2} ci basta calcolare lo sviluppo di Taylor in 0 del sin fino all'ordine 4 e valutarlo in 1.

$$\sin 1 \approx 1 - \left.\frac{x^3}{3!}\right|_{x=1} \approx 1 - \frac{1}{3!} = 0,8\overline{3}$$